

TSFS09 – Modellering och Reglering av Motorer och Drivlinor (MoDr)

Fö 2 - Medelvärdesmodellering forts.

Lars Eriksson - Kursansvarig

Fordonssystem, Institutionen för Systemteknik
Linköpings universitet
larer@isy.liu.se

September 5, 2025

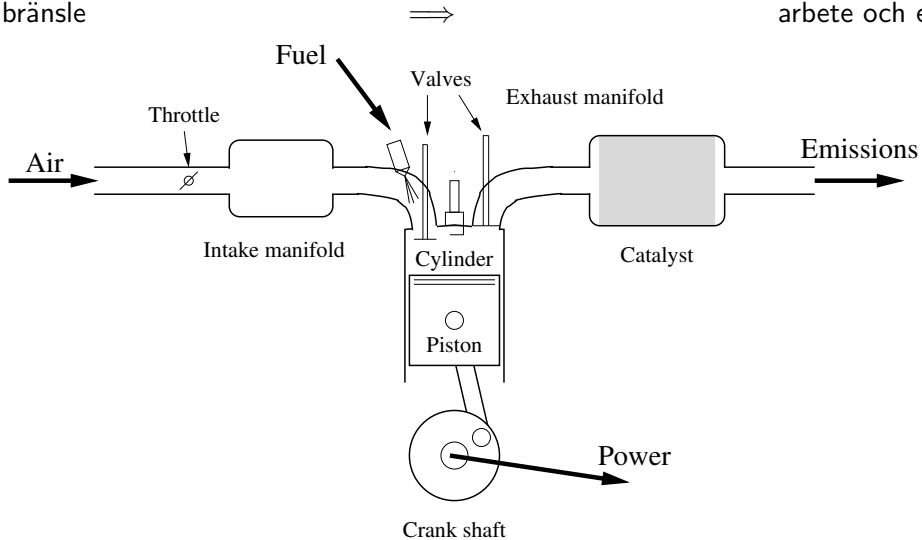
Innehållsförteckning

- 1 Repetition
 - Trottelflöde
- 2 Medelvärdesmodellering – Luftens väg
- 3 Medelvärdesmodellering – Bränslets väg
- 4 Modellering och parameterbestämning

En viktig bild

Luft och bränsle

arbete och emissioner

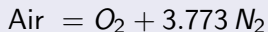


Vad är luft?

Constituent	Symbol	Molar mass	Volume [%]	Mass [%]
Oxygen	O_2	31.999	20.95	23.14
Nitrogen	N_2	28.013	78.09	75.53
Argon	Ar	39.948	0.93	1.28
Carbon dioxide	CO_2	44.010	0.03	0.05
Neon	Ne			
Helium	He			
⋮				

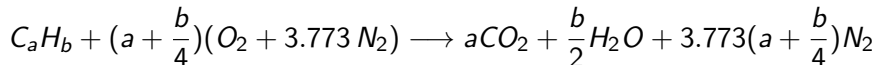
En enkel modell

- Syre är syre.
- Allt annat är atmosfärsiskt kväve.



Förbränning och stökiometri

- Perfekt förbränning av ett kolväte



- Stökiometriskt luft/bränsle-förhållande

$$(A/F) = \frac{m_a}{m_f} \text{ och } (A/F)_s = \frac{(a + \frac{b}{4})(2 \cdot 16.00 + 3.773 \cdot 2 \cdot 14.007)}{12.01 a + 1.008 b}$$

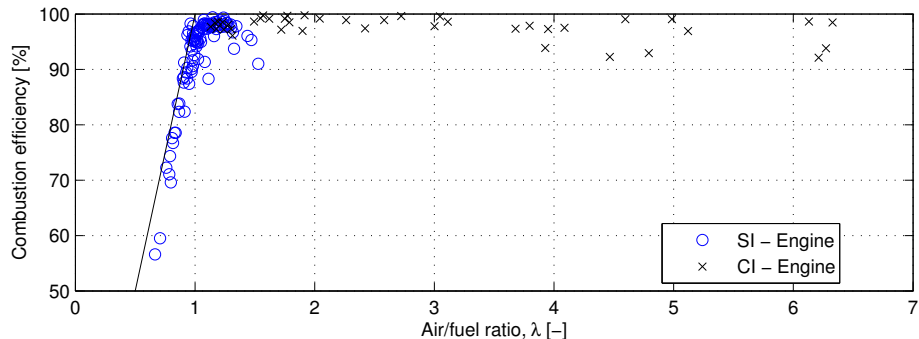
- Normaliserat luft/bränsle-förhållande

$$\lambda = \frac{(A/F)}{(A/F)_s} = \frac{\frac{m_a}{m_f}}{(A/F)_s} \text{ och } \phi = \frac{1}{\lambda}$$

Frigjord värme och en enkel modell

$$Q = \min(\lambda, 1) \cdot m_f \cdot q_{LHV}$$

Luft/Bränsleförhållande och bränsleomvandlingsgrad



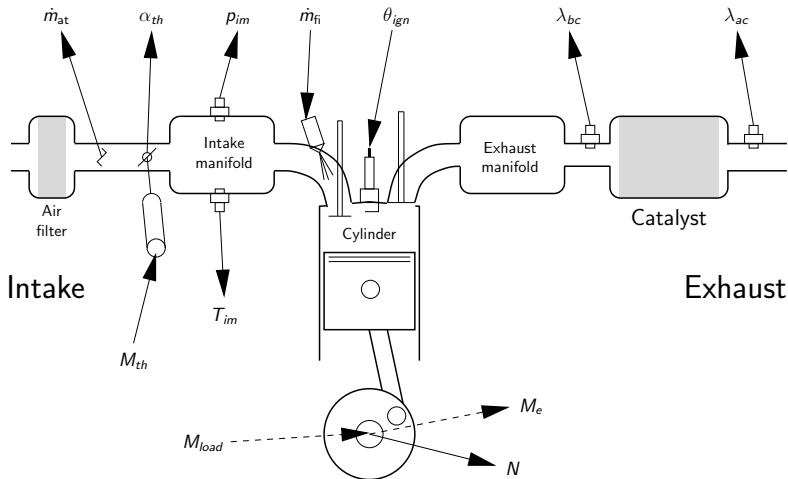
Fuel/air equivalence ratio $\phi = \frac{1}{\lambda}$. (Datakälla: Heywood (1988)).

Frigjord värme och en enkel modell

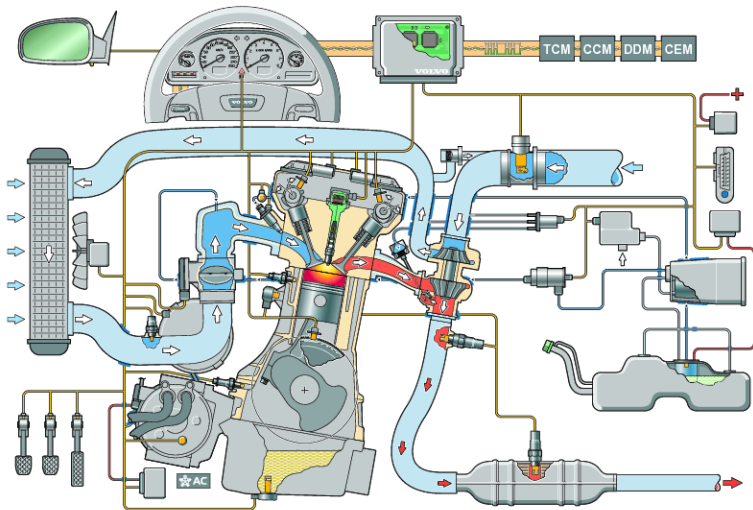
$$Q = \min(\lambda, 1) \cdot m_f \cdot q_{LHV}$$

Medelvärdesmodellering - Ett sensor/aktuator perspektiv

Samband mellan aktuator och sensorer samt sensorer inbördes.

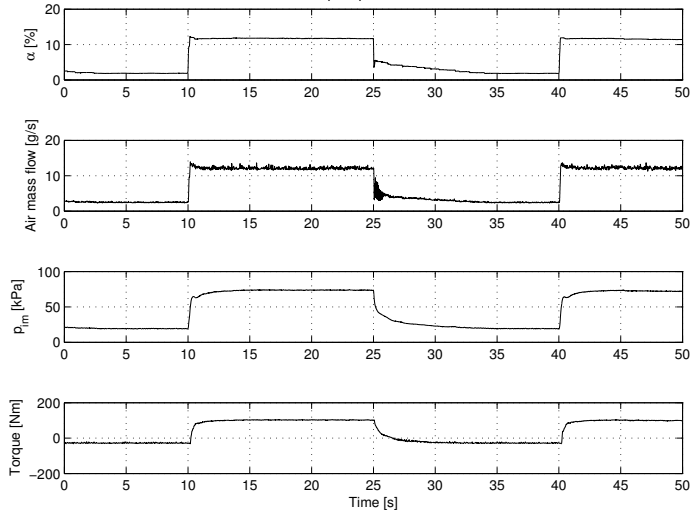


Stegsvar: Trottelt $\rightarrow$ Luftmassflöde, Insugstryck, Moment



Stegsvar: Trottelt $\rightarrow$ Luftmassflöde, Insugstryck, Moment

Throttle step responses at 1000 RPM



Modell-mål

Bygga virtuell motor.

Förstå signalerna.

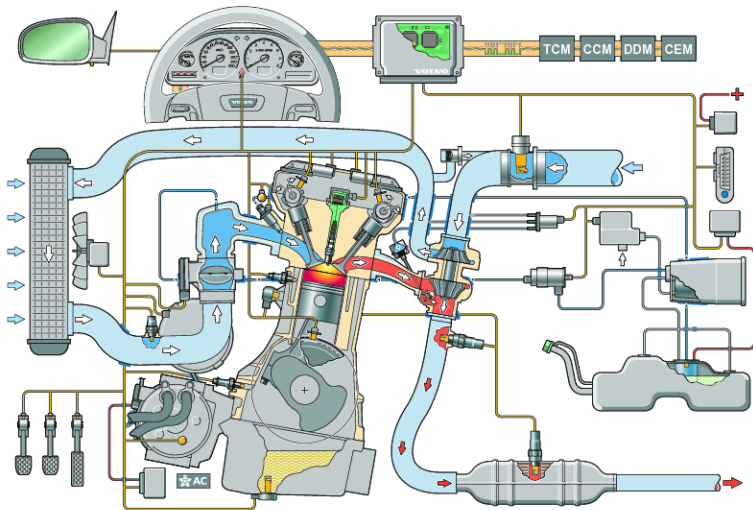
Modellen ska generera signalerna.

Insignal (u) = trottelt vinkel.

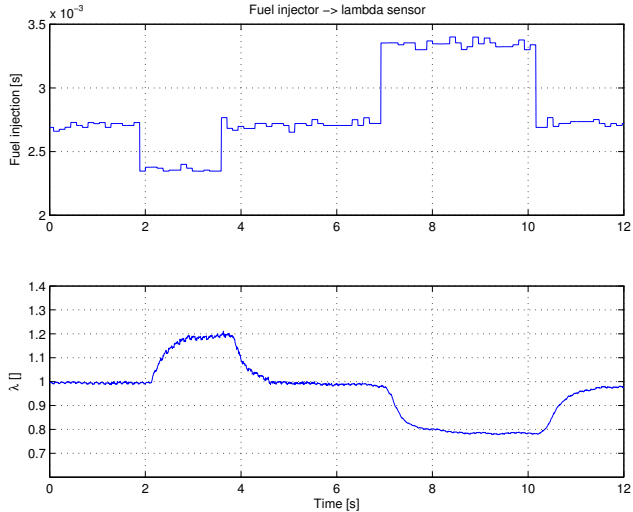
Delmodeller för utsignaler:

- Trottelflöde.
- Insugsdynamik.
- Momentmodell.

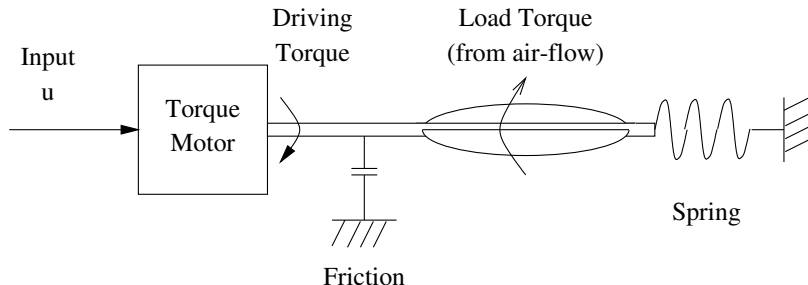
Stegsvar: Bränsleinjektor $\rightarrow$ Lambda sensor



Stegsvar: Bränsleinjektor → Lambda sensor



Model 1: Trottelförelse



Drivande moment, $M_{th} \Rightarrow$ Trottelvinkel, α

Rörelsedynamik, DC-motor med återföringsfjäder (Newtons 2a lag)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + a\frac{d\alpha}{dt} = b \cdot (M_{th} - M_{air}) - c \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

Modellering av M_{air} är inte lätt (montering och aerodynamic)

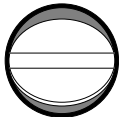
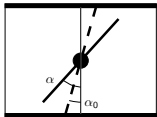
Användning: Reglerdesign av trottelservo.

Kompressibel isentropisk strömning genom en strypning.

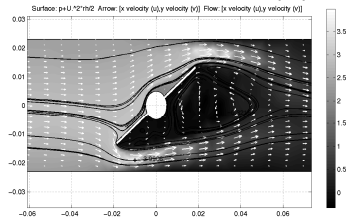
$$\dot{m}_{at} = \frac{p_{amb}}{\sqrt{RT_{amb}}} \cdot A_{th}(\alpha) \cdot C_{th}(\alpha) \cdot \Psi(\Pi)$$

Densitet uppströms, högre densitet ger högre massflöde.

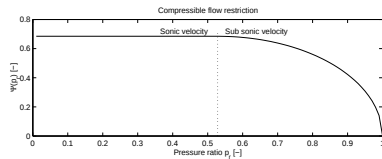
Area $A_{th}(\alpha)$



Kontraktion $C_{th}(\alpha)$

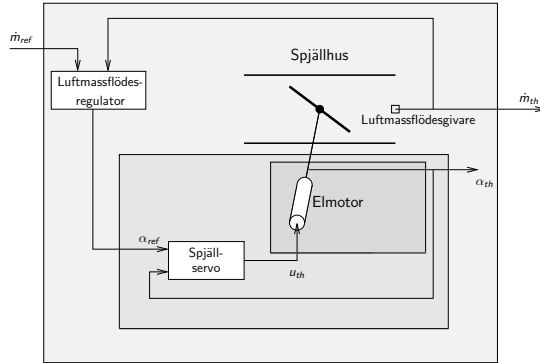


Ljudhastigheten



$$\Psi(\Pi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\Pi^{\frac{2}{\gamma}} - \Pi^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right)} & \Pi > \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} - \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right)} & \Pi \leq \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$

Sammanfattning av trottell modellerna



Fyra modeller (tre numrerade):

Modell 1: Trottellrörelse

$$u_{th} \longrightarrow \alpha$$

Modell 2: Trottelservo

$$\alpha_{ref} \longrightarrow \alpha$$

Luftmassflöde:

$$A(\alpha) \longrightarrow \dot{m}_{at}$$

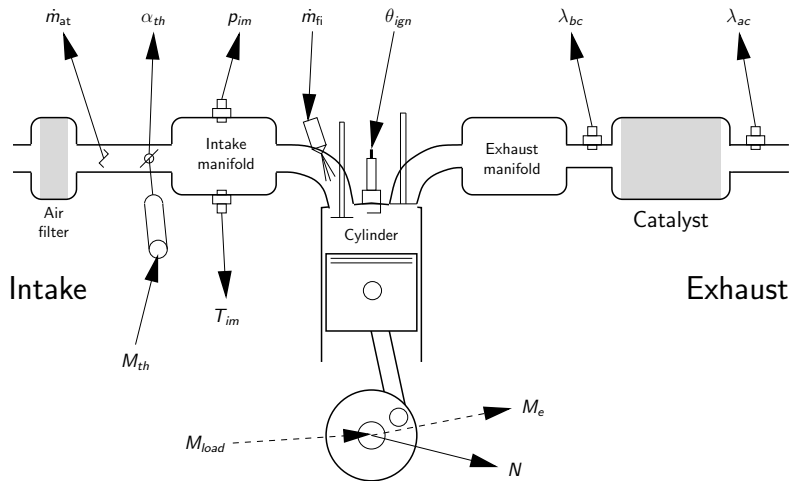
Modell 3: Luftmassflödesregulator:

$$\dot{m}_{at,ref} \longrightarrow \dot{m}_{at}$$

Innehållsförteckning

- 1 Repetition
- 2 Medelvärdesmodellering – Luftens väg
 - Massflöde till cylinder
 - Tryckuppbyggnads dynamik
 - Simulering
 - Insugsrörsmodell – Validering
- 3 Medelvärdesmodellering – Bränslets väg
- 4 Modellering och parameterbestämning

Medelvärdesmodellering - Massflöde till motor



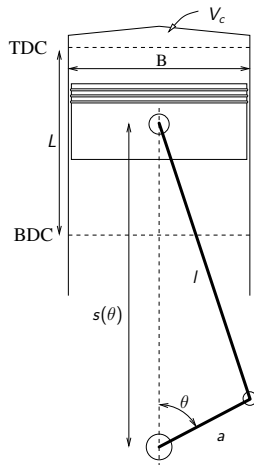
Motorgeometri – Kort ordlista

Beteckning	Engelska	Svenska
V_d	Displacement volume	Sveptvolym (motorvolym)
V_c	Clearance volume	Kompressionsvolym
B	Bore	Borrning
S	Stroke	Slag
l	Connecting rod length	Vevstakslängd
a	Crank radius	Vevaxelradie
θ	Crank angle	Vevaxelvinkel

Total volym för motorn: $V_D = V_d n_{cyl}$.

Kompressionsförhållandet är en designparameter för motorn.

$$r_c = \frac{V_d + V_c}{V_c}$$



Fyllnadsgrad = volumetric efficiency

$$\eta_{vol} = \frac{\text{volymflöde in i motor}}{\text{svept volym per tidsenhet}} = \frac{\frac{\dot{m}_{ac}}{\rho_a}}{\frac{V_d n_{cyl} N}{n_r}} = \frac{\dot{m}_{ac} n_r}{\rho_a V_d n_{cyl} N}$$

Beskriver motorns förmåga att suga in ny luft

- “Mappas” upp i bromsbänk $\eta_{vol}(N, p_{im})$
- Inkluderas som en delmodell i en större modell

Ett exempel:

$$\eta_{vol}(N, p_{im}) = c_0 + c_1 N + c_2 p_{im} + c_3 N p_{im} + \dots$$

parametrarna c_i bestäms från mätdata med minstakvadratmetoden

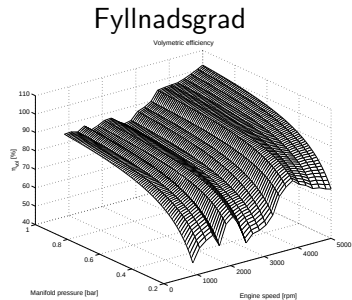
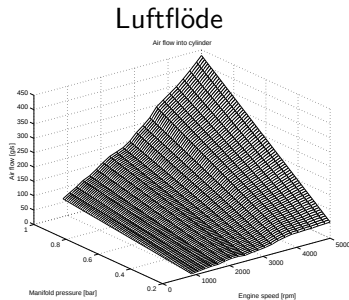
Modellen för luftflödet till cylindrarna

$$\dot{m}_{ac}(N, p_{im}, \rho_a) = \eta_{vol}(N, p_{im}) \frac{\rho_a V_d n_{cyl} N}{n_r}$$

densiteten från ideala gaslagen $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{RT}$

$$\dot{m}_{ac}(N, p_{im}, T_{im}) = \eta_{vol}(N, p_{im}) \frac{p_{im} V_d n_{cyl} N}{R T_{im} n_r}$$

$\eta_{vol}(N, p_{im})$ “mappas” upp i bromsbänk



$$\dot{m}_{ac}(N, p_{im}) \propto \eta_{vol}(N, p_{im}) \frac{N p_{im}}{T_{im}}$$

Vi kan ju mäta $\dot{m}_{ac}$, så varför gå omvägen via $\eta_{vol}(N, p_{im})$?

- Flödet beror på var vi “kör” men det gör inte effektiviteten.
- Modellen skall klara av andra omgivningstryck/temperaturer!

Insugsrör – Tryckuppsbyggnad

Insugsrör – Kontrollvolym med massbevarande

- Massförändring

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{at} - \dot{m}_{ac}$$

- Tillståndsekvation – ideala gaslagen

$$p_{im} = \frac{m R T_{im}}{V_{im}}$$

- Antar att R , T_{im} och V_{im} är konstanta, endast massan förändras

$$\frac{dp_{im}}{dt} = \frac{R T_{im}}{V_{im}} \frac{dm}{dt} = \frac{R T_{im}}{V_{im}} (\dot{m}_{at} - \dot{m}_{ac})$$

Första dynamiska modellen i kursen

Beskriver hur trycket förändras vid obalans i flödena.

Stationäritet: $dp/dt=0$ gör att $\dot{m}_{at} - \dot{m}_{ac} = 0$.

Finns ingen sensor för $\dot{m}_{ac}$ men vid stationaritet så är $\dot{m}_{at} = \dot{m}_{ac}$. Grunden för “mappning”.

Simulering – Ordinära differentialekvationer

Linjära system	Olinjära system
$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t)$ $y(t) = C x(t) + D u(t)$	$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$ $y(t) = g(x(t), u(t))$

Känner $f(x, u)$, $g(x, u)$, $u(t)$, samt $x(t_0)$.

Vad blir $x(t)$?

Söker lösningen $x(t)$ for $t \in [t_0, t_{end}]$

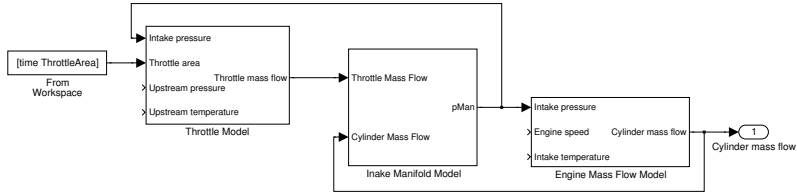
$$\int_{t_0}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau = x(t) - x(t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

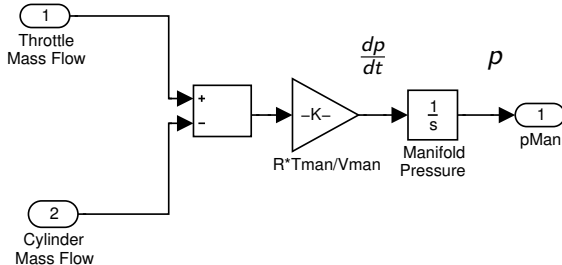
Implementering i Simulink: $\int u(t) dt = \frac{1}{s} u(t)$

Numeriska lösningsmetoder (Euler, Runge-Kutta, Adams, ...)

Implementering av tryckuppbyggnad



ODE för tryckdynamiken i insugsröret



$$\frac{dp}{dt} = \frac{R T}{V} (\dot{m}_{at} - \dot{m}_{ac})$$

$$p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t \frac{dp}{dt} dt$$

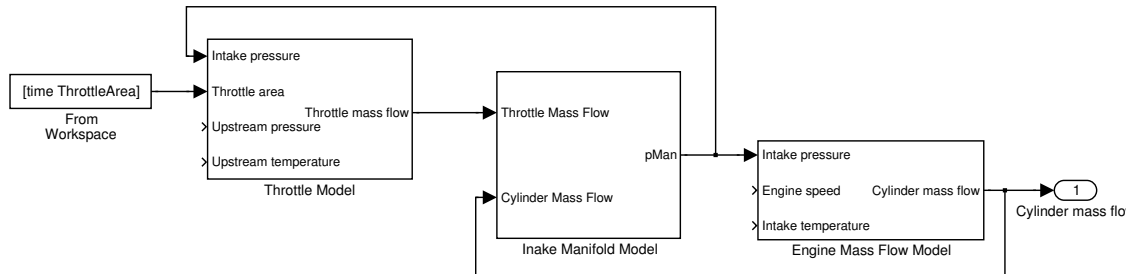
$$p(t) = p_0 + \int \frac{R T}{V} (\dot{m}_{at} - \dot{m}_{ac}) dt$$

$$p(t) = p_0 + \frac{1}{s} \frac{R T}{V} (\dot{m}_{at} - \dot{m}_{ac})$$

Specifiera initialtillståndet $p_0 = p(t_0)$ i $\frac{1}{s}$

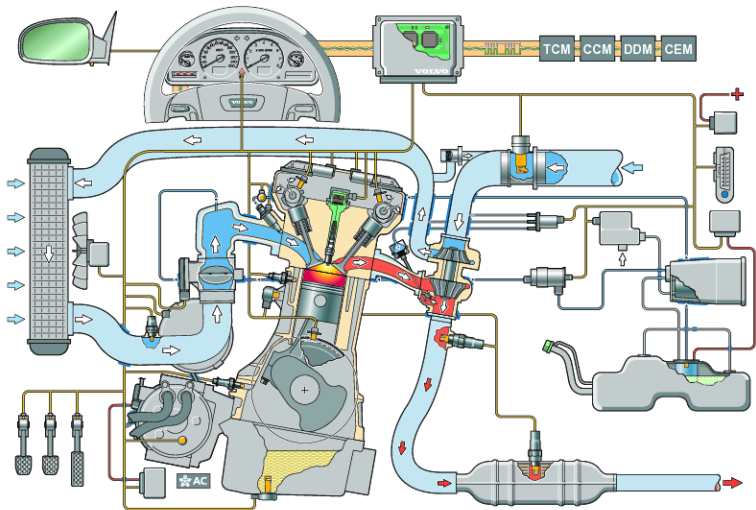
Insugsrör – Modellvalidering

- Validering – Jämföra modell och verklighet (mätning)



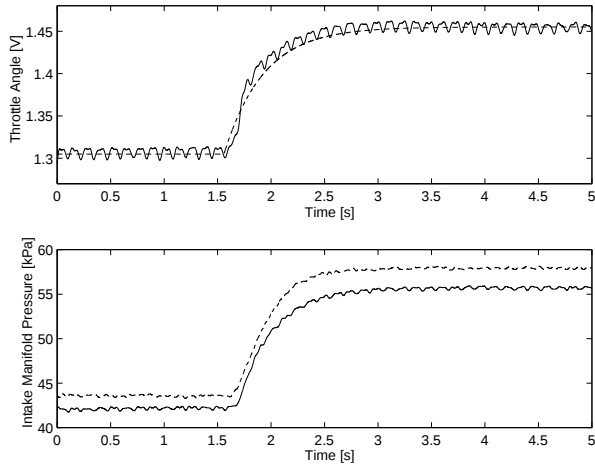
- Koppla in uppmätta signaler till modellen
- Simulera $\Rightarrow$ Utsignal
- Jämför simuleringsresultatet med mätningen

Insugsrörsmodell – Validering



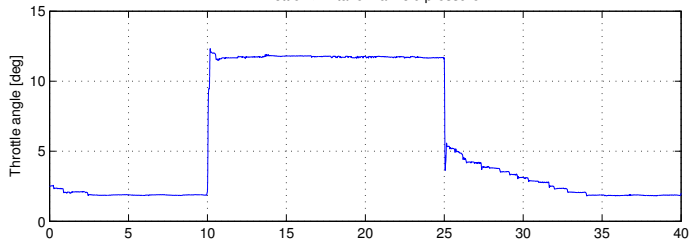
Insugsrör – Modellvalidering

Trottel, insugsrör, fyllnadsgradsmodell

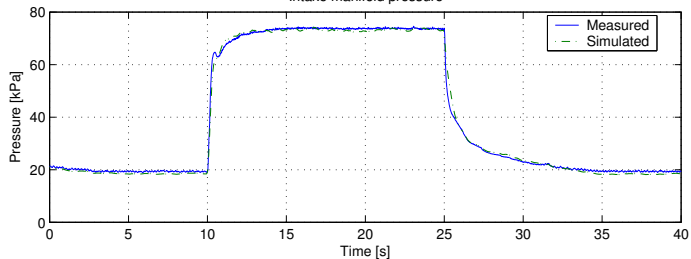


Validering 2: Insugsrör

Throttle → Intake manifold pressure



Intake manifold pressure



Modellering av gasflöden

Olika modeller för olika flödestyper.

- Är flödet laminärt eller turbulent?

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu} = / \text{ pipe flow } / = \frac{\rho \frac{\dot{m}}{\rho A} d}{\mu} = \frac{4 \dot{m}}{\pi d \mu}$$

$Re > 5000$ turbulent

$Re < 2000$ laminärt

- Hur snabbt flödar gasen?

$U < 70$ m/s inkompressibelt

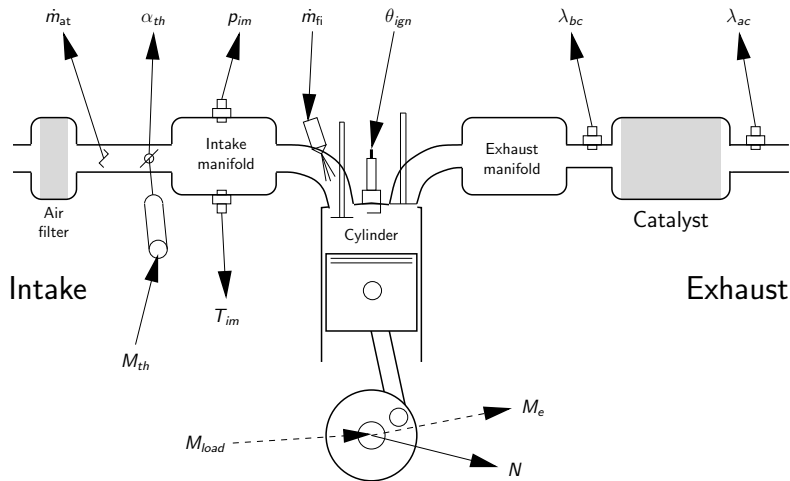
$U > 70$ m/s kompressibelt flöde

- De flesta flöden i motorerna är

- turbulent
- inkompressibelt

- Vissa reglerventiler behöver modelleras om kompressibla.

Medelvärdesmodellering - Flöden i andra komponenter



- Laminärt flöde

$$\Delta p = C_{\text{lam}} \frac{R T_{us}}{p_{us}} \dot{m} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{m} = \frac{1}{C_{\text{lam}}} \frac{p_{us}}{R T_{us}} \Delta p$$

där C_{lam} är en modellparameter och $\frac{R T_{us}}{p_{us}}$ är densiteten.

- Turbulent flöde

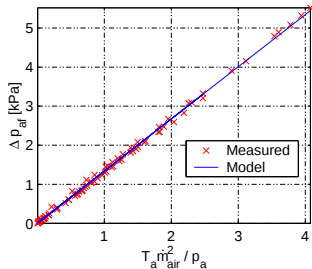
$$\Delta p = C_1 \rho_{us} U^2 = C_2 \frac{R T_{us}}{p_{us}} \dot{m}^2$$

$$\dot{m} = C_3 \sqrt{\frac{p_{us} \Delta p}{R T_{us}}}$$

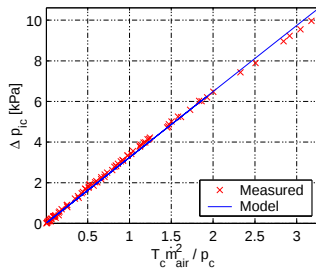
- Båda inkluderar densitets "korrektion" $\frac{R T_{us}}{p_{us}}$

Intercooler, luftfilter and avgassystem

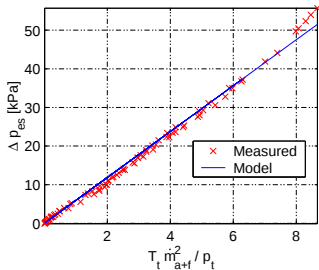
Air Filter Pressure Model



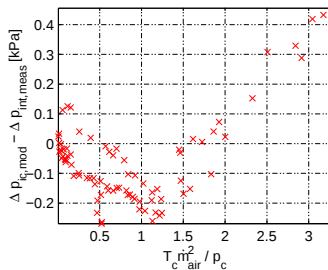
Intercooler Pressure Model



Exhaust System Pressure Loss



Intercooler Residual Plot



Bra överensstämmelse med Enkel modell för tryckfall

$$\Delta p = C_1 \rho_{us} U^2 = C_2 \frac{R T_{us}}{p_{us}} \dot{m}^2$$

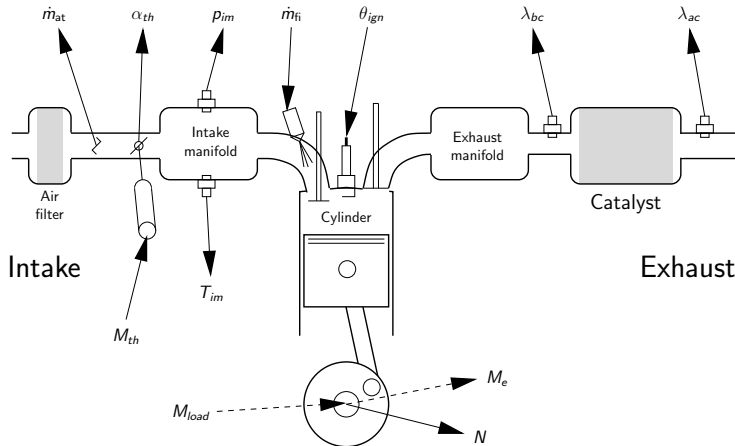
Invers ger flödet:

$$\dot{m} = C_3 \sqrt{\frac{p_{us} \Delta p}{R T_{us}}}$$

Modellen används på detta sätt i MVEM.

Medelvärdesmodellering - Luftens väg

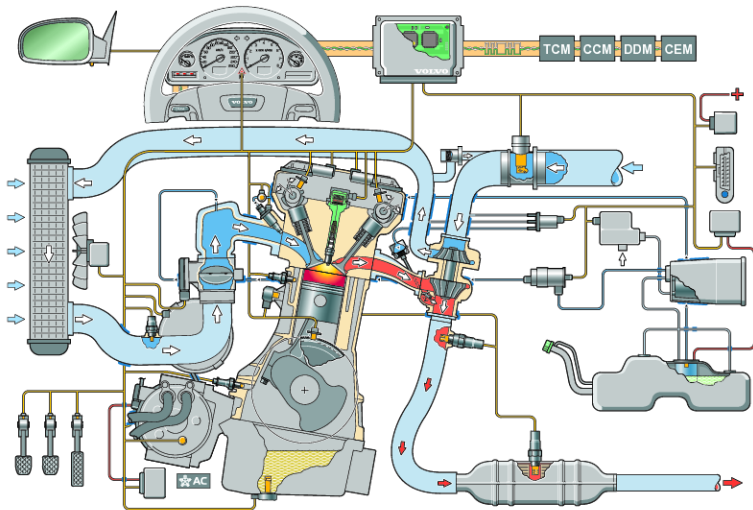
- Återanvändning – Snabbar upp produktutvecklingen.
- Cylindermodellen: 3 komponenter
 - Luftmassflöde –Avgastemperatur –Moment



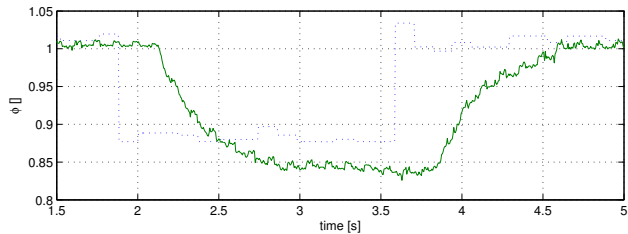
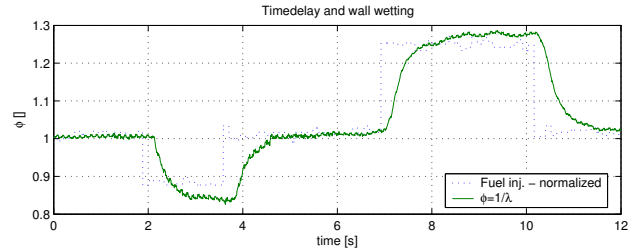
Innehållsförteckning

- 1 Repetition
- 2 Medelvärdesmodellering – Luftens väg
- 3 Medelvärdesmodellering – Bränslets väg
 - Bränsleinjektor
 - Bränsledynamik – Bränslefilm
 - Bränslets väg – Validering
- 4 Modellering och parameterbestämning

Bränslets väg

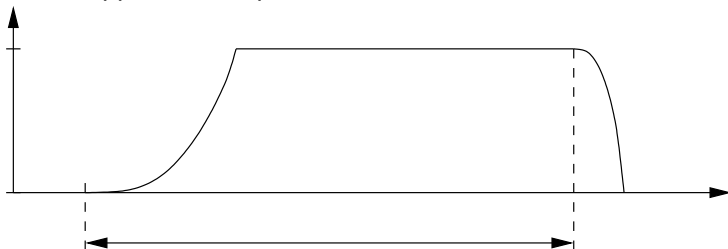


Modelleringsuppgift



Bränsleinjektor

- Injektorn öppnas av en puls

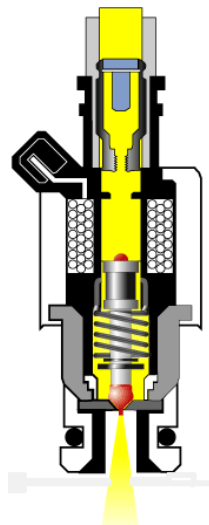


- Sammanslagen öppnings- och stängningstid t_0 .
- Injicerad massa per cykel

$$m_{fi} = c \sqrt{\Delta p} (t_{inj} - t_0(u_{batt}))$$

- Bränsleflöde per sekund

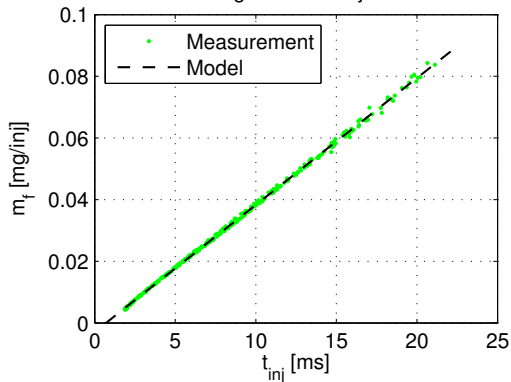
$$\dot{m}_{fi} = \frac{N n_{cyl}}{n_r} m_{fi} = N c_1 (t_{inj} - t_0(u_{batt}))$$



Bränsleinjektor

Bensinmotor (~ 3 bar)

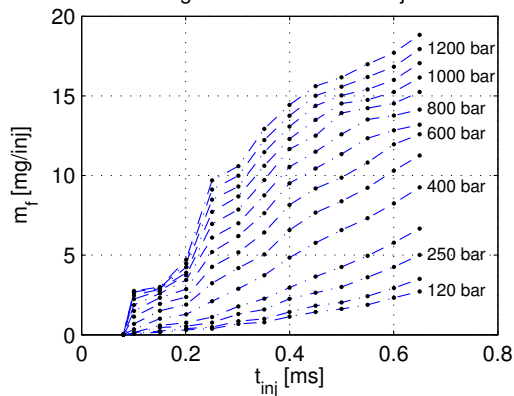
SI Engine – Port Injector



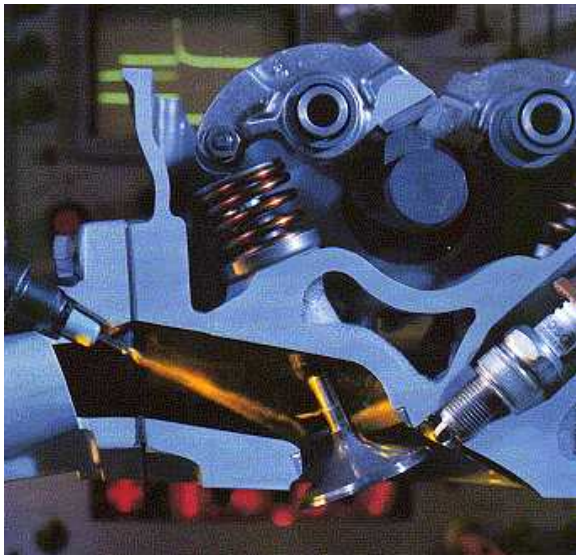
Tryckregulator Δp
Inkompressibelt medium

Dieselmotor (~ 1000 bar)

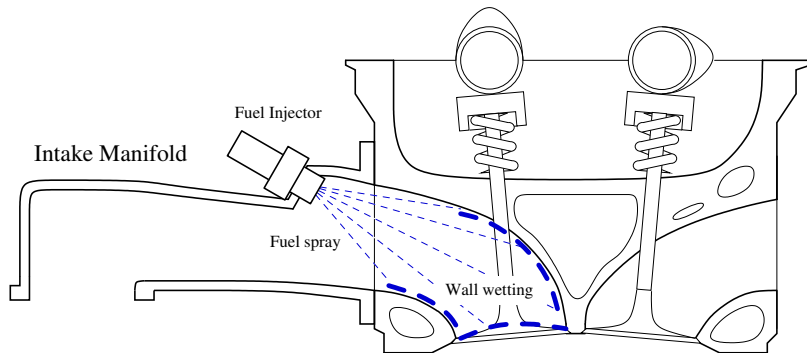
CI Engine – Common Rail Injector



Trycksensor p plus vågdynamik
Kompressibelt medium



Bränsleflöde – Bränslefilm



En del $(1 - X)$ går direkt in i cylindern.

En del X träffar väggarna och fastnar i en bränslefilm.

Bränslet avdunstar från filmen med en tidskonstant τ_{fp} och går slutligen in i cylindern.

Massans bevarande + avdunstningsarea proportionell mot massan.

(A/F) – Transportfördröjning och sensordynamik

In till cylinder

$$\lambda(t) = \frac{\dot{m}_{ac}(t)}{\dot{m}_{fc}(t)} \frac{1}{(A/F)_s}$$

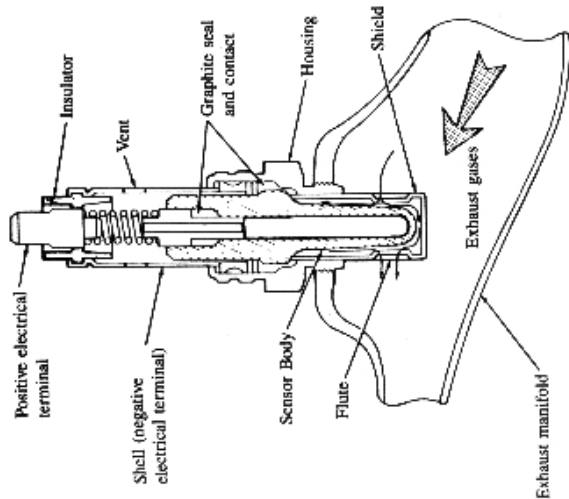
Tidsfördröjning, $\tau_d(N)$

$$\lambda_{exh}(t) = \lambda(t - \tau_d(N))$$

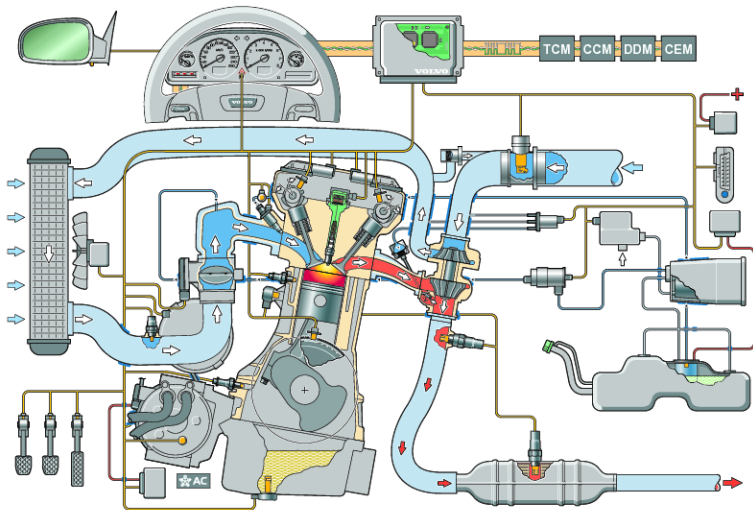
Sensordynamik

$$\frac{d}{dt} \lambda_s(t) = \frac{1}{\tau_\lambda} (\lambda_{exh}(t) - \lambda_s(t))$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_s(t) = \frac{1}{\tau_\lambda} (\lambda(t - \tau_d(N)) - \lambda_s(t))$$

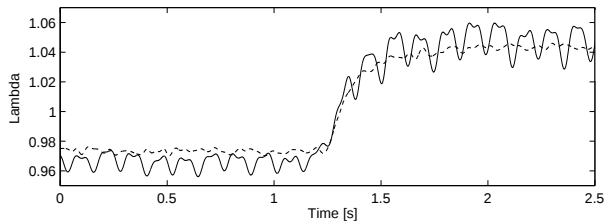
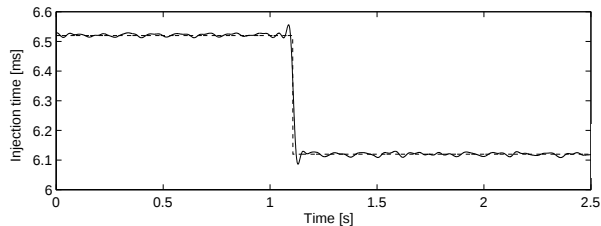


Bränslets väg – Validering

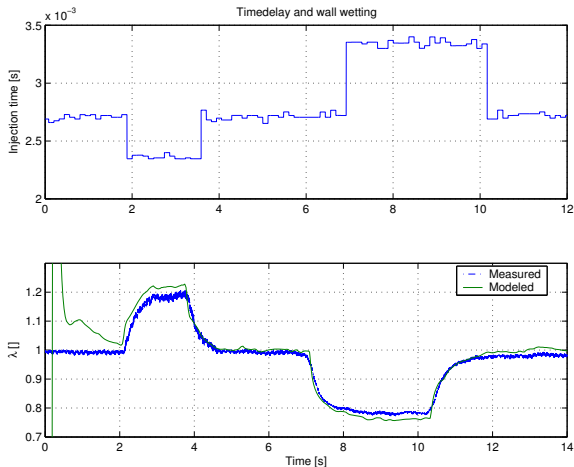


(A/F) – Modellvalidering

Injektor, väggvätning, tidsfördröjning och sensordynamik.



(A/F) – Modellvalidering (en annan motor)



–Glöm inte bort att sätta initialvärden!

Innehållsförteckning

- 1 Repetition
- 2 Medelvärdesmodellering – Luftens väg
- 3 Medelvärdesmodellering – Bränslets väg
- 4 Modellering och parameterbestämning**

Hur kan man bestämma modellparametrar?

- Fysik och grundläggande principer.
- Givet i datablad från tillverkaren.
- Stegsvarexperiment (se laborationskompendiet).
 - Uppmätta insignaler in till modellen,
Jämför modellutsignal och uppmätt utsignal.
 - Manuell tuning
 - Systematisk optimering, minstakvadrat (linjär, olinjär).

Minsta kvadrat (MK) metoden är modellerarens standardverktyg.
I linjär algebra kursen så handräknade ni för att förstå principerna.
Nu, används Matlab och vi löser linjära MK problem enkelt.
Kan lösa tusentals MK problem.

Innehållsförteckning

- 1 Repetition
 - Trottelflöde
- 2 Medelvärdesmodellering – Luftens väg
 - Massflöde till cylinder
 - Tryckuppbyggnads dynamik
 - Simulering
 - Insugsrörsmodell – Validering
- 3 Medelvärdesmodellering – Bränslets väg
 - Bränsleinjektor
 - Bränsledynamik – Bränslefilm
 - Bränslets väg – Validering
- 4 Modellering och parameterbestämning